(MAT5SB) (3110-5B)

B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER/DECEMBER 2020.

(Adv. Supplementary)

Third Year – Fifth Semester

Part II – Mathematics

Paper VI — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

Each question caries 5 marks.

1. The set W of ordered triads (x, y, o) where $x, y \in F$ is a subspace of $V_3(F)$.

$x, y \in F$ మరియు (x, y, o) త్రికములుగా గల సమితిలు అయితే $V_3(F)$ నకు W ఒక ఉపాంతరాళము అని చూపుము.

2. Express the vector $\alpha=(1,-2,5)$ as a linear combination of the vectors $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ and $e_3 = (2, -1, 1)$.

$\alpha=(1,-2,5)$ ని $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ మరియు $e_3 = (2, -1, 1)$ ల ఋజు సంయోగంగా వ్రాయుము.

3. State and prove Invariance theorem.

నిశ్చరత సిద్ధాంతంను నిర్వచించి నిరూపించుము.

4. Is the mapping $T : R^3 \to R^2$ defined by $T(x, y, z) = (|x|, 0)$ a linear transformation?

$T: R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (|x|, 0)$ గా నిర్వచింపబడినచో T ఒక ఋజుపరివర్తన అవుతుందా?

5. Let $T: U(F) \to V(F)$ be a linear transformation. Then the range set R(T) is subspace of V(F) prove it.

$T: U(F) \to V(F)$ ఋజుపరివర్తన అయితే V లో పరివర్తన వ్యాప్తి R(T) ఉపాంతరాళము అని చూపుము.

6. Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు కోటిని కనుగొనుము

7. Find the characteristic polynomial of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు లాక్షణిక బహుపది కనుక్కోండి.

8. State and prove Parallelogram law.

సమాంతర చతుర్భుజ నియమంను నిర్వచించి నిరూపించుము.

SECTION B — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer the following questions. Each question carries 10 marks.

9. (a) Let $V(F)$ be a vector space. A non empty set $w \subseteq V$. Then prove that the necessary and sufficient condition for W to be a subspace of V is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in V \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

$V(F)$ ఒక సదిశాంతరాళము మరియు శూన్యేతర సమితి $w \subseteq V$. V లో W ఒక ఉపాంతరాళము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a,b \in F, \alpha,\beta \in V \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ అని చూపుము.

Or

(b) If S, T are the subspaces of a vector space $V(F)$, then prove that

S, T లు $V(F)$లో ఉపాంతరాళాలు అయితే

(i) $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$

(ii) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$. అని చూపుము.

10. (a) P and Q are the two subspaces of R^4 defined by $P = \{(a,b,c,d) / b + c + d = 0\}, Q = \{(a,b,c,d) / a + b = 0, c = 2d\}$. Find the dimension and basis of P, Q and $P \cap Q$.

R^4 సదిశాంతరాళంను P మరియు Q లు ఉపాంతరాళాలు $P = \{(a,b,c,d) / b+c+d=0\}, Q = \{(a,b,c,d) / a+b=0, c=2d\}$ అయితే P, Q మరియు $P \cap Q$ లకు ఆధారము మరియు పరిమాణంను కనుక్కోండి.

Or

(b) Let W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$ then prove that $\dim(V / W) = \dim V - \dim W$.

$V(F)$ పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము మరియు W అనేవి $V(F)$ నకు ఉపాంతరాళము అయితే $\dim(V / W) = \dim V - \dim W$ అని చూపుము.

11. (a) The mapping $T : V_3(R) \to V_2(R)$ is defined by $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$. Show that T is a linear transformation.

$T : V_3(R) \to V_2(R)$, $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ గా నిర్వచింపబడినచో T ఒక ఋజుపరివర్తనము అని చూపుము.

Or

(b) Find the null space, range, rank and nullity of the transformation $T : R^2 \to R^3$ defined by $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$.

$T : R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ ఋజు పరివర్తనము అయినచో అంతస్థం, పరివర్తన వ్యాప్తి మరియు కోటి, శూన్యతలను కనుగొనుము.

12. (a) Find the characteristic roots and the corresponding characteristic vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు లాక్షణిక మూలాలు మరియు తత్సంబంధిత లాక్షణిక సదిశలను కనుక్కోండి.

Or

(b) State and prove Cayley-Hamilton theorem.

కెయిలే-హేమిల్టన్ సిద్ధాంతను నిర్వచించి నిరూపించుము.

13. (a) State and prove Schwarz's inequality.

ష్వార్జ్ అసమానతను నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Applying Gram-Schmidt process obtain an orthonormal basis of $R^3(R)$ from the basis $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$.

$R^3(R)$యొక్క ఆధారం $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$ నుంచి గ్రామ్-ష్మిడ్ లంబీకరణ పద్ధతిని ఉపయోగించి $R^3(R)$ నకు ఒక లంబాభిలంబ ఆధారాన్ని రాబట్టండి.
