B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MARCH/APRIL 2021.

Third Year — Fifth Semester

Part II — Mathematics

Paper V — RING THEORY AND VECTOR CALCULUS

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

1. Prove that the characteristic of a Boolean ring is 2.
బూలియన్ వలయం యొక్క లాక్షణికం 2 అని నిరూపించండి.

2. Prove that every field is an integral domain.
ప్రతి క్షేత్రము పూర్ణాంక ప్రదేశము అవుతుందని చూపండి.

3. If f is a homomorphism of a ring R into a ring R' then prove that $\ker f$ is an ideal of R.
R వలయం నుండి R' నకు f ఒక వలయ సమరూపత అయిన $\ker f$ అనునది R నకు ఒక ఆదర్శమని చూపండి.

4. If f is a homomorphism of a ring R into the ring R' then f is an into isomorphism if and only if $\ker f = \{0\}$.
$f : R \to R'$ వలయ సమరూపత అయితే f అను సమరూపత అన్వేక సమరూపత కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\ker f = \{0\}$ కావటం అని నిరూపించండి.

5. If $\bar{f} = (2x^2y - x^4)\bar{i} + (e^{xy} - y\sin x)\bar{j} + (x^2\cos y)\bar{k}$ then find $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2}$ and $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x\, \partial y}$.
$\bar{f} = (2x^2y - x^4)\bar{i} + (e^{xy} - y\sin x)\bar{j} + (x^2\cos y)\bar{k}$ అయిన $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2}$ మరియు $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x\, \partial y}$ లను కనుగొనండి.

6. If $a = x + y + z$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, $c = xy + yz + zx$ then prove that $[grad\, a\ grad\, b\ grad\, c] = 0$.
$a = x + y + z$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, $c = xy + yz + zx$ అయిన $[grad\, a\ grad\, b\ grad\, c] = 0$ అని చూపండి.

7. Evaluate $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$ where $\bar{F} = 3x^2\bar{i} + (2xz - y)\bar{j} + z\bar{k}$ along the straight line C from $(0, 0, 0)$ to $(2, 1, 3)$.
$\bar{F} = 3x^2\bar{i} + (2xz - y)\bar{j} + z\bar{k}$ అయితే $(0, 0, 0)$ నుండి $(2, 1, 3)$ వరకు సరళరేఖ C కు $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$ ను కనుగొనండి.

8. Evaluate by Green's theorem $\oint_C (y - \sin x)\,dx + \cos x\,dy$ where C is the triangle enclosed by the lines $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $\pi y = 2x$.
$\oint_C (y - \sin x)\,dx + \cos x\,dy$ ను గ్రీన్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి కనుగొనండి. ఇక్కడ C అనేది $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $\pi y = 2x$ రేఖల చేత పరిబద్ధమైన త్రిభుజము.

SECTION B — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer ALL of the following questions.

9\. (a) Prove that $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Q\}$ is a field with respect to ordinary addition and multiplication of numbers.

$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Q\}$ అను సమితి సంకలన, గుణకారముల దృష్ట్యా క్షేత్రము అని చూపండి.

Or

(b) Prove that the ring of integers Z is a principal ideal ring.

Z, పూర్ణాంక వలయము ఒక ప్రధాన ఆదర్శ వలయము అని చూపండి.

10\. (a) An ideal U of a commutative ring R with unity is maximal if and only if the quotient ring R/U is a field.

తత్సమ మూలకం కల వినిమయ వలయమైన R లో U అనే ఆదర్శం అధికతమం కావటానికి వ్యుత్పన్నమైన R/U ఒక క్షేత్రం కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్తక నియమం.

Or

(b) State and prove fundamental theorem of Homomorphism of Rings.

వలయాల సమరూపతా ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.

11\. (a) Prove that $grad(\overline{A} \cdot \overline{B}) = (\overline{B} \cdot \nabla)\overline{A} + (\overline{A} \cdot \nabla)\overline{B} + \overline{B} \times curl\,\overline{A} + \overline{A} \times curl\,\overline{B}$.

$grad(\overline{A} \cdot \overline{B}) = (\overline{B} \cdot \nabla)\overline{A} + (\overline{A} \cdot \nabla)\overline{B} + \overline{B} \times curl\,\overline{A} + \overline{A} \times curl\,\overline{B}$ అని చూపండి.

Or

(b) If $\overline{a}$ is a constant vector then prove that $curl \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r^3} = \frac{-\overline{a}}{r^3} + \frac{3\overline{r}}{r^5}(\overline{a} \cdot \overline{r})$.

$\overline{a}$ ఒక స్థిర సదిశ అయిన $curl \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r^3} = \frac{-\overline{a}}{r^3} + \frac{3\overline{r}}{r^5}(\overline{a} \cdot \overline{r})$ అని చూపండి.

12\. (a) If $\overline{F} = (x^2 + y^2)\overline{i} - 2xy\overline{j}$, evaluate $\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ where the curve C is the rectangle in xy plane bounded by $y = 0, y = b, x = 0, x = a$.

$\overline{F} = (x^2 + y^2)\overline{i} - 2xy\overline{j}$ అయితే xy-తలంలో $y = 0, y = b, x = 0, x = a$ అనే నిబద్ధమైన దీర్ఘ చతురస్రం C వెంబడి $\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ ను గణించండి.

Or

(b) If $\overline{F} = (x + y^2)\overline{i} - 2x\overline{j} + 2yz\overline{k}$, evaluate $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, ds$ where S is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.

$\overline{F} = (x + y^2)\overline{i} - 2x\overline{j} + 2yz\overline{k}$ అయి ప్రథమాష్టమంలో $2x + y + 2z = 6$ తల భాగం S అయితే $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, ds$ ను గణించండి.

13\. (a) State and prove Gauss divergence theorem.

గాస్ అపసరణ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Verify Stokes theorem for $\overline{F} = -y^3\overline{i} + x^3\overline{j}$ where S is the circular disc $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$.

$\overline{F} = -y^3\overline{i} + x^3\overline{j}$ అయి S అను వృత్తాకార డిస్క్ $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$ అయిన స్టోక్స్ సిద్ధాంతాన్ని