(MAT5SB) **(3110-5B)**

B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MARCH/APRIL 2021.

Third Year — Fifth Semester

Part II – Mathematics

Paper VI — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

1. If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space $V(F)$ then prove that $W_1 \cap W_2$ is also a subspace of $V(F)$.

   సదిశాంతరాళం $V(F)$లో W_1 మరియు W_2లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయిన $W_1 \cap W_2$ కూడా మరలా $V(F)$ ఉపాంతరాళం అగునని చూపండి.

2. If α, β, γ are linearly independent vectors in $V(R)$ then show that $\alpha+\beta,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha$ are also linearly independent.

   $V(R)$ లో α, β, γ సదిశలు ఋజావరాధీనాలు అయిన $\alpha+\beta,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha$లు కూడా ఋజావరాధీనాలు అని చూపండి.

3. State and prove Invariance theorem.

   నిశ్చిరత సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.

4. The mapping $T : V_3(R) \to V_2(R)$ is defined by $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$. Show that T is a linear transformation.

   $T : V_3(R) \to V_2(R)$ ప్రమేయాన్ని $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$గా నిర్వచిస్తే T ఋజుపరివర్తనమని చూపండి.

5. Let $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces and $T : U \to V$ is a linear transformation. Then prove that $R(T)$ is a subspace of V.

   $U(F)$ మరియు $V(F)$లు రెండు సదిశాంతరాళములు మరియు $T : U \to V$ ఋజుపరివర్తన అయితే $V(F)$లో $R(T)$ ఉపాంతరాళము అని చూపుము.

6. Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

   పై మాత్రికకు కోటిని కనుక్కోండి.

Scanned By Scanner Go

7. State and prove parallelogram law.

సమాంతర చతుర్భుజాల నియమాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

8. Find a unit vector orthogonal to $(4, 2, 3)$ in R^3.

R^3 అంతరాళంలో $(4, 2, 3)$ సదిశకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుగొనండి.

SECTION B — $(5 \times 10 = 50$ marks)

Answer ALL questions.

9. (a) Let $V(F)$ be a vector space. A non empty set $W \subseteq V$. The necessary and sufficient condition for W to be a subspace of V is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

$V(F)$ ఒక సదిశాంతరాళము, శూన్యేతర సమితి $W \subseteq V$. V లో W ఒక ఉపాంతరాళం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్తక నియమం $a, b \in F$; $\alpha, \beta, \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

Or

(b) If S is a subset of a vector space $V(F)$ then prove that S is a subspace of $V \Leftrightarrow L(S) = S$.

సదిశాంతరాళం $V(F)$నకు S ఉప సమితి అయితే Sకు ఒక ఉపాంతరాళము $V \Leftrightarrow L(S) = S$ అని చూపుము.

0. (a) Let W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$ then prove that $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.

$V(F)$ పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళానికి W ఉపాంతరాళము అయితే $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ అని చూపుము.

Or

(b) If W_1 and W_2 are the subspaces of $V_4(R)$ defined by $W_1 = \{(a,b,c,d): b - 2c + d = 0\}$, $W_2 = \{(a,b,c,d): a = d, b = 2c\}$. Compute $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ and $\dim(W_1 + W_2)$.

$V_4(R)$ లో W_1 మరియు W_2 ఉపాంతరాళాలు $W_1 = \{(a,b,c,d): b - 2c + d = 0\}$, $W_2 = \{(a,b,c,d): a = d, b = 2c\}$ గా నిర్వచించబడితే $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ మరియు $\dim(W_1 + W_2)$ లు కనుగొనండి.

(a) State and prove Rank nullity theorem.

కోటి-శూన్యతా సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Describe explicitly the linear transformation $T: R^2 \to R^2$ such that $T(2, 3) = (4, 5)$ and $T(x, y, z)$, $T(1, 0) = (0, 0)$.

$T: R^2 \to R^2$ లో $T(2, 3) = (4, 5)$ మరియు $T(1, 0) = (0, 0)$ ఋజుపరివర్తన అయిన $T(x, y, z)$ ను కనుక్కోండి.

12. (a) State and prove Cayley-Hamilton theorem.

కెయిలే-హామిల్టన్ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Find the characteristic roots and the corresponding characteristic vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు లాక్షణిక విలువలు మరియు వాటికి అనురూపమైన లాక్షణిక సదిశలను కనుగొనుము.

13. (a) If α, β are two vectors in an inner product space $V(F)$ then prove that $|<\alpha, \beta>| = \|\alpha\| \|\beta\|$ if and only if α and β are linearly dependent.

$V(F)$ అనే ఒక అంతర లబ్ధాంతరాళంలో α, β లు రెండు సదిశలు అయిన $|<\alpha, \beta>| = \|\alpha\| \|\beta\|$ α మరియు β లు రేఖీయ ఆశ్రితాలు అని చూపండి.

Or

(b) State and prove Bessel's in equality.

బెసల్స్ అసమానతను ప్రవచించి నిరూపించుము.
