B.A. DEGREE EXAMINATION, MARCH/APRIL 2020.

(Regular)

Fourth Semester

Part II — Mathematics

Paper I — REAL ANALYSIS

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

1. State and prove sandwich theorem.

   శాండ్‌విచ్ సిద్ధాంతము ప్రవచించి నిరూపింపుము.

2. Test for convergence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ శ్రేణి అభిసరణతను పరీక్షింపుము.

3. Test for convergence $\sum \frac{2^n - 2}{2^n + 1} x^{-n} (n > 0)$

   $\sum \frac{2^n - 2}{2^n + 1} x^{-n} (n > 0)$ శ్రేణి అభిసరణతను పరీక్షింపుము.

4. Show that $f : R \to R$ defined by $f(x) = x$ if $x \in R - Q$ and $f(x) = -x$ if $x \in Q$ is continous only at '0'.

   $f : R \to R$ ది $f(x) = x$ if $x \in R - Q$ మరియు $f(x) = -x$ if $x \in Q$ అని నిర్వచించిన శూన్యము దగ్గర మాత్రమే f అవిచ్ఛిన్నము అని చూపండి.

5. Prove that $f : R \to R$ given by $f(x) = x^2$ is a continuous function on R but not uniformly continuous on R.

   $f : R \to R$ ప్రమేయము $f(x) = x^2$ అని నిర్వచించినప్పుడు R పై f అవిచ్ఛిన్నమని మరియు R పై ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము కాదని చూపుము.

6. Show that $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0, f(x) = 0, x = 0$ is continuous but not derivable at $x = 0$.

   $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0, f(x) = 0,$ ప్రమేయం $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నముగుతుంది కాని $x = 0$ వద్ద అవకలనీయము కాదు అని చూపండి.

7. Show that $\frac{v - u}{1 + v^2} < \operatorname{Tan}^{-1} v - \operatorname{Tan}^{-1} u < \frac{v - u}{1 + u^2}$ for $0 < u < v$

   $\frac{v - u}{1 + v^2} < \operatorname{Tan}^{-1} v - \operatorname{Tan}^{-1} u < \frac{v - u}{1 + u^2}$ $0 < u < v$ కు నిరూపింపుము.

8. Prove that $f \in R[a, b]$ then $|f| \in R[a, b]$

   $f \in R[a, b]$ అయితే $|f| \in R[a, b]$ అని చూపుము.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

9

Answer ALL of the following questions.

9. (a) Prove that A monotone sequence is convergent if and only if, it is bounded.

ఏక దిష్ట అనుక్రమము అభిసరించుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అది పరిబద్ధము అగును అని చూపుము.

Or

(b) State and prove Cauchy convergence criterion.

అభిసరణంపై కోషీ సార్వత్రిక సూత్రమును వ్రాసి నిరూపించుము.

10

10. (a) State and prove D'Alembert's test.

డి-అలంబర్ట్ నిష్పత్తి ప్రవచించి, నిరూపించుము.

Or

(b) (i) State and prove Leibnitz test.

లైబ్నిజ్ పరీక్షను ప్రవచించి, నిరూపించుము.

(ii) Examine the convergence $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ శ్రేణి అభిసరణను పరీక్షించుము.

11. (a) (i) If $f:[ab]\rightarrow R$ is continuous on $[ab]$ then prove that f is bounded on $[ab]$.

$[ab]$ పై $f:[ab]\rightarrow R$ అవిచ్ఛిన్నమైన $[ab]$ పై f పరిబద్ధము అని చూపండి.

5

(ii) Examine for continuity the function f defined by $f(x)=|x|+|x-1|$ at $x=0,1$.

$f(x)=|x|+|x-1|$ అని నిర్వచించిన $x=0,1$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నమని చూపుము.

Or

(b) If f is continuous on $[ab]$ and $f(a), f(b)$ have opposite sign's then there exists $c \in (ab)$ then prove that $f(c)=0$.

$[ab]$ పై f అవిచ్ఛిన్నము మరియు $f(a), f(b)$ లకు వ్యతిరేక గుర్తులున్న $f(c)=0$ అగునట్లు $c \in (ab)$ వ్యవస్థిత మగును అని చూపండి.

12. (a) If $f:[ab] \to R$ is such that

(i) f is derivable on $[ab]$ and

(ii) $f'(a), f'(b)$ have opposite sign's then there exists $c \in [ab]$ then prove that $f'(c)=0$.

$f:[ab] \to R$ ప్రమేయము అవుతూ 10

(i) $[ab]$ పై f అవకలనీయము మరియు 3)

(ii) $f'(a), f'(b)$ వ్యతిరేక గుర్తులుంటే $f'(c)=0$ అని $c \in [ab]$ వద్ద నిరూపించుము.

10

Or

(b) State and prove Cauchy-mean value theorem.

కోషి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతంని వ్రాసి నిరూపించుము.

13. (a) State and prove necessary and sufficient condition for integrability. 4

సమాకలనీయము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) (i) State and prove fundamental theorem of integral calculus.

సమాకలనముపై ప్రాథమిక సిద్ధాంతము ప్రవచించి నిరూపించుము.

(ii) Evaluate $\int_0^{\pi/4} (\sec^4 x - \tan^4 x)\,dx$.

$\int_0^{\pi/4} (\sec^4 x - \tan^4 x)\,dx$ విలువ కనుగొనుము.