B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2019.

Third Year — Fifth Semester

Part II — Mathematics

Paper VI — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

1. Define Linear span. Prove that $L(S)$ is a subspace of $V(F)$

   ఋజువ్యాప్తిని నిర్వచింపుము. $V(F)$ నకు $L(S)$ ఉపాంతరాళము అని చూపుము.

2. Express the vector $\alpha = (1, -2, 5)$ as a linear combination of the vectors $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 3)$ and $e_3 = (2, -1, 1)$.

   $\alpha = (1, -2, 5)$ ని $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ మరియు $e_3 = (2, -1, 1)$ ల ఋజు సంయోగంగా వ్రాయండి.

3. If w is the subspace of $V_4(R)$ generated by the vectors $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$ and $(3, 8, -3, -5)$ find a basis of w and its dimension.

   $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$ మరియు $(3, 8, -3, -5)$ ల సదిశలలో జనితమైన $V_4(R)$ యొక్క ఉపాంతరాళములు w అయిన w కి ఆధారమును మరియు దాని పరిమాణమును కనుగొనుము.

4. The mapping $T : V_3(R) \to V_1(R)$ is defined by $T(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$, can T be a linear transformation?

   ప్రమేయము $T : V_3(R) \to V_1(R)$, $T(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$, అయితే T ఋజు పరివర్తనా?

5. Let $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces and $T : U \to V$ is a linear transformation. Then prove that $N(T)$ is a subspace of $U(F)$.

   $U(F)$ మరియు $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళములు మరియు $T : U \to V$ ఋజు పరివర్తన అయితే $U(F)$ లో $N(T)$ ఉపాంతరాళము అని చూపుము.

6. Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ to upper triangle form.

   $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ మాత్రికను ఎగువ త్రిభుజ మాత్రికగా వ్రాయుము.

7. State and prove triangle inequality.

   త్రిభుజ అసమానతను నిర్వచించి నిరూపించుము.

8. Find a unit vector orthogonal to $(4, 2, 3)$ in R^3.

   R^3 అంతరాళములో $(4, 2, 3)$ సదిశకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

SECTION B — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer all FIVE questions.

Each question carries 10 marks.

9\. (a) Let $V(F)$ be a vector space. A non-empty set $W \subseteq V$. The necessary and sufficient conditions for W to be a subspace of V are

(i) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$.

(ii) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$.

$V(F)$ ఒక సదిశాంతరాళం, $W \subseteq V$ అనేది శూన్యేతర ఉపసమితి. V కి W ఉపాంతరాళం కావడానికి

ఈ క్రింది ధర్మాలు ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తమూ

(i) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$.

(ii) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$ అని చూపుము.

Or

(b) If S is a subset of a vector space $V(F)$ then prove that S is a subspace of $V \Leftrightarrow L(S) = S$.

10\. (a) Let W_1 and W_2 be two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$ then prove that $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

W_1, W_2 లు $V(F)$ పరిమిత సదిశాంతరాళానికి ఉపాంతరాళాలు. అయితే

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ అని చూపుము.

Or

(b) Show that the set $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ is a basis of $C^3(C)$. Hence find the coordinates of the vector $(3+4i, 6i, 3+7i)$ in $C^3(C)$.

$\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ సమితి $C^3(C)$ నకు ఆధారము అని చూపుము. దాని ద్వారా $(3+4i, 6i, 3+7i)$ సదిశకు నిరూపకాలు కనుగొనుము.

11\. (a) Find $T(x, y, z)$ where $T: R^3 \to R$ is defined by $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$, $T(0,0,1) = -2$.

$T: R^3 \to R$ $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$, $T(0,0,1) = -2$., T రుజు పరివర్తన అయితే $T(x, y, z)$ ని కనుక్కోండి.

Or

(b) State and prove Rank-Nullity theorem.

కోటి - శూన్యత సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

12\. (a) Find the characteristic roots and the corresponding characteristic vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

మాత్రికకు లాక్షణిక విలువలు, వాటికి అనురూపమైన లాక్షణిక సదిశలను కనుగొనుము.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Or

(b) State and prove Cayley–Hamilton theorem.

కెయిలీ-హామిల్టన్ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

13. (a) State and prove Cauchy–Schwarz's inequality.

కాషీ - ష్వార్జ్ అసమానతను నిర్వచించి నిరూపింపుము.

Or

(b) Applying Gram-Schmidt process, obtain an orthonormal basis of $R^3(R)$ from the basis $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$.

$R^3(R)$ లో ఆధారం $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$ నుండి గ్రామ్-ష్మిడ్ లంబీకరణ పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక లంబాభిలంబ ఆధారాన్ని నిర్మించండి.