

(5318MAT15)

THREE YEAR B.Sc./B.A. (CBCS) DEGREE EXAMINATIONS, OCTOBER/NOVEMBER, 2019

FIFTH SEMESTER

Part II – Mathematics

Paper V — RING THEORY & MATRICES

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

PART – A

పార్ట్ - ఎ

Answer any FIVE of the following questions.
క్రింది వానిలో ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 5 marks = 25 marks)

1. If R is a ring and $a, b, c, d \in R$ then prove that
(a) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
(b) $a + b = c + d \Leftrightarrow a - c = d - b$.
 R ఒక చలయమై $a, b, c, d \in R$ అయిన
(a) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
(b) $a + b = c + d \Leftrightarrow a - c = d - b$ అని చూపండి.
2. Prove that a field has no zero divisors.
ఒక క్షేత్రానికి శూన్య భాజకాలు ఉండవని చూపండి.
3. If the characteristic of a ring is 2 and the elements a, b of the ring commutes then prove that
 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 = (a - b)^2$.
వలయం R యొక్క లాక్షణికం 2 అయి a, b లు R లోని మూలకాలైతే అవి వినిమయ ధర్మాన్ని పాటిస్తుంటే
 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 = (a - b)^2$ అని చూపండి.
4. Prove that the ideals of a field are only $\{0\}$ and f itself.
ఒక క్షేత్రము యొక్క ఆదర్శాలు $\{0\}$, f లు మాత్రమే అని చూపండి.
5. If f is a homomorphism of a ring R into the ring R' then f is an into homomorphism iff $\ker f = \{0\}$.
 R వలయం నుండి R' వలయానికి f ఒక సమరూపత అయిన f ఒక సమరూపత కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $\ker f = \{0\}$.
6. The homomorphic image of a commutative ring is a commutative ring.
వినిమయ వలయము యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబము వినిమయ వలయము అవుతుందని చూపండి.

[P.T.O]

7. Find the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రికా కోటిని కనుక్కోండి.

8. Show that the equation $x + y + z = 4$, $2x + 5y - 2z = 3$, $x + 7y - 7z = 5$ are not consistent.
 $x + y + z = 4$, $2x + 5y - 2z = 3$, $x + 7y - 7z = 5$ అను సమీకరణాల వ్యవస్థ స్థిరము అని చూపండి.

9. Find the characteristic roots and characteristic vectors of $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు లాక్షణిక మూలాలు, సదిశలను కనుక్కోండి.

10. If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ then express $2A^5 - 3A^4 + A^2 - 4I$ as a linear polynomial in A by using Cayley-Hamilton theorem.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ అయిన కేలే హ్యమిల్టన్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $2A^5 - 3A^4 + A^2 - 4I$ ను ఒక రేఖీయ బహుపది అని చూపండి.

PART - B
పార్ట్ - బి

Answer any FIVE of the following questions choosing atleast ONE question from each Section.

ప్రతి సెక్షన్ నుండి కనీసం ఒక ప్రశ్నను ఎంపిక చేసుకుని ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 10 marks = 50 marks)

SECTION - A

UNIT - I

11. If P is a prime then Z_p , the ring of integers (mod P) is a field.

P ఒక ప్రధాన సంఖ్య అయిన Z_p , పూర్ణాంకాల వలయం (mod P దృష్ట్యా) అవుతుందని చూపండి.

12. Prove that the set $Z(i) = \{a + bi/a, b \in z, i^2 = -1\}$ of Gaussian integers is an integral domain with respect to addition and multiplication of numbers. Is it a field?

గాసియన్ పూర్ణాంకాల సమితి $Z(i) = \{a + bi/a, b \in z, i^2 = -1\}$ సంఖ్యల సాధారణ సంకలన, గుణనాల దృష్ట్యా పూర్ణాంక ప్రదేశము అవుతుందని చూపండి? ఇది ఒక క్షేత్రం అవుతుందా?

UNIT - II

13. Prove that the set of all 2×2 matrices over the field of complex numbers is a ring with unity under addition and multiplication of matrices.

సాధారణ మాత్రికల సంకలన, గుణనాల దృష్ట్యా అన్ని 2×2 మాత్రికల సమితి, సంకీర్ణ సంఖ్యల క్షేత్రంపై ఒక వలయం అవుతుందని చూపండి.

14. Prove that every ideal of Z is a principal ideal.

Z యొక్క ప్రతి ఆదర్శం ఒక ప్రధాన ఆదర్శం అవుతుందని చూపండి.

UNIT - III

15. If U is an ideal of a ring R then the set $R/U = \{x+U/x \in R\}$ is a ring with respect to operations of addition and multiplication of cosets defined as follows :

$$(a+U)+(b+U) = (a+b)+U \text{ and } (a+U)(b+U) = ab+U \text{ for } a+U, b+U \in R/U.$$

R వలయానికి U ఒక ఆదర్శం అయిన $R/U = \{x+U/x \in R\}$ సహ సమితుల సంకలన మరియు గుణనాల దృష్ట్యా అనగా $(a+U)+(b+U) = (a+b)+U$ మరియు $(a+U)(b+U) = ab+U$ $a+U, b+U \in R/U$ అయినప్పుడు R/U ఒక వలయం అని చూపండి.

16. State and prove fundamental theorem of homomorphism of rings.

వలయాలలో సమరూపతా మూల సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి, నిరూపించండి.

SECTION - B

UNIT - IV

17. Find the rank of the following matrix by reducing it into normal form

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

పై మాత్రికను అభిలంబ రూపంలోకి మార్చి మాత్రికా కోటిని కనుక్కోండి.

18. Solve the equations $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$, $2x - y + 3z = 9$ by matrix inversion method.
 $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$, $2x - y + 3z = 9$ సమీకరణాల వ్యవస్థను మాత్రికా విలోమ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

UNIT - V

19. Find the eigen values and eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రికను ఐగన్ విలువలు, ఐగన్ సదిశలను కనుక్కోండి.

20. State and prove Cayley Hamilton theorem.

కేలే హ్యమిల్టన్ సిద్ధాంతాన్ని నిరవచించి, నిరూపించండి.
