(5328MAT15)

THREE YEAR B.Sc./B.A (CBCS) DEGREE EXAMINATIONS, OCTOBER/NOVEMBER, 2019

FIFTH SEMESTER

Part II – Mathematics

Paper VI — LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Max. Marks : 75*

PART – A

భాగము – ఎ

Answer any FIVE of the following questions.
ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 5 marks = 25 marks)

1. Show that the linear space $L(S)$ of any subset S of a vector space $V(F)$ is a subspace of $V(F)$.
సదిశాంతరాళం $V(F)$ లోని ఒక ఉపసమితి S యొక్క ఋజువ్యాప్తి $L(S)$ అనేది $V(F)$ యొక్క ఉపాంతరాళమని చూపుము.

2. Show that the system of vectors $(1, 3, 2)$, $(1, -7, -8)$, $(2, 1, -1)$ of the vector space $V_3(R)$ is linearly dependent.
సదిశాంతరాళం $V_3(R)$ లోని $(1, 3, 2)$, $(1, -7, -8)$, $(2, 1, -1)$ సదిశల వ్యవస్థ ఋజు అస్వతంత్రమని చూపుము.

3. Show that the set of vectors $\{(2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 1, -2)\}$ forms a basis of R^3.
$\{(2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 1, -2)\}$ అనే సదిశలసమితి R^3 యొక్క ఆధారాన్ని రూపొందిస్తుందని చూపుము.

4. If $U = \{(1, 2, 1), (0, 1, 2)\}$ and $W = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ then determine the dimension of $U + W$.
$U = \{(1, 2, 1), (0, 1, 2)\}$, $W = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ అయితే $U + W$ యొక్క పరిమాణాన్ని కనుగొనుము.

5. Find $T(x, y, z)$ where $T : R^3 \to R$ is defined by $T(1, 1, 1) = 3$, $T(0, 1, -2) = 1$ and $T(0, 0, 1) = -2$.
$T : R^3 \to R$ అనేది $T(1, 1, 1) = 3$, $T(0, 1, -2) = 1$ $T(0, 0, 1) = -2$ గా నిర్వచితమైతే, $T(x, y, z)$ ను కనుగొనుము.

6. If $T : R^3 \to R^2$ is the linear transformation defined as $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$, then find Rank (T) and Nullity (T).
$T : R^3 \to R^2$ అనే ఋజు పరివర్తన $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$ గా నిర్వచితమైతే T యొక్క కోటి, శూన్యతలను కనుగొనుము.

7. In R^2, if $\langle \alpha, \beta \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 + 4x_2y_2$ for $\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2)$, prove that R^2 is an inner product space.

R^2 లో $\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2)$, లకు $\langle \alpha, \beta \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 + 4x_2y_2$ అయితే R^2 అనేది R^2 అంతర్లబ్ద అంతరాళమని నిరూపించుము.

8. State and prove triangle inequality in an inner product space.

ఒక అంతర్లబ్ద అంతరాళంలో త్రిభుజ అసమానత్వాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

9. Find a unit vector orthogonal to $(4, 2, 3)$ in R^3.

R^3 లో $(4, 2, 3)$ సదిశకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

10. Given $\{(2, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ is a basis of R^3. Construct an orthonormal basis for R^3.

$\{(2, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ అనేది R^3 యొక్క ఒక ఆధారమయితే, R^3 యొక్క లంబాభిలంబ ఆధారాన్ని నిర్మించుము.

PART – B

భాగము – బి

Answer any FIVE of the following questions, choosing atleast ONE question from each Section.

ప్రతి సెక్షన్ నుండి ఒక ప్రశ్న చొప్పున ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములను వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 10 marks = 50 marks)

SECTION - A

విభాగము – ఎ

UNIT – I

11. If S, T subsets of a vector space $V(F)$, then prove that

(a) $S \le T \Rightarrow L(S) \le L(T)$.

(b) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

సదిశాంతరాళం $V(F)$ లో S, T లు ఉపసమితులయితే

(a) $S \le T \Rightarrow L(S) \le L(T)$

(b) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ అని నిరూపించుము.

12. Let a non-empty set W be a subset of a vector space $V(F)$. Then show that W is a subspace of V if and only if $a \in F$ and $\alpha, \beta \in V \Rightarrow a\alpha + \beta \in W$.

W అనే శూన్యేతర సమితి సదిశాంతరాళం $V(F)$ యొక్క ఉపసమితి అనుకుందాం. అయితే W అనేది V యొక్క ఉపాంతరాళం కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం $a \in F$ $\alpha, \beta \in V \Rightarrow a\alpha + \beta \in W$ అని చూపుము.

UNIT – II

13. If $V(F)$ is a finite dimensional vector space, then prove that any two bases of V have the same number of elements.

$V(F)$ అనేది ఒక పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళమైతే, V యొక్క ఏ రెండు ఆధారాలయినా ఒకే మూలకాల సంఖ్యను కలిగి ఉంటాయని నిరూపించుము.

14. If W_1 and W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$, then show that $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళం $V(F)$ లో W_1, W_2 లు రెండు ఉపాంతరాళాలయితే $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ అని చూపుము.

UNIT – III

15. If $U(F)$ and $V(F)$ are two vector spaces and $T : U \to V$ is a linear transformation then prove that null space $N(T)$ is a subspace of $U(F)$.

$U(F)$, $V(F)$ రెండు సదిశాంతరాళాలు, $T : U \to V$ ఒక ఋజుపరివర్తన అయితే శూన్యతాంతరాళము $N(T)$ అనేది $U(F)$ యొక్క ఉపాంతరాళమని నిరూపించుము.

16. State and prove Rank–Nullity theorem.

కోటి – శూన్యతా సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

SECTION - B

విభాగము – బి

UNIT – IV

17. State and prove parallelogram law in an inner product space.

ఒక అంతర్లబ్ద అంతరాళంలో సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

18. State and prove Cauchy–Schwartz inequality in an inner product space.

ఒక అంతర్లబ్ద అంతరాళంలో కౌషీ – స్క్వార్జ్ అసమానత్వాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

UNIT – V

19. Prove that in an inner product space, any orthonormal set of vectors is linearly independent.

ఒక అంతర్లబ్ద అంతరాళంలో సదిశల యొక్క ఏ లంబాభిలంబ సమితైనా ఋజు స్వతంత్రమని నిరూపించుము.

20. State and prove Parseval's identity in an inner product space.

ఒక అంతర్లబ్ద అంతరాళంలో పార్సెవెల్ తుల్యతను ప్రవచించి నిరూపించుము.
