(MAT3S) **(2110-3)**

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2018.

Second Year — Third Semester

Part II — Mathematics

Paper III — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

(Short answer questions.)

Answer any FIVE of the following.

1. Show that the set $G = \{x / x = 2^a 3^b \text{ and } a, b \in z\}$ is a group under multiplication.

   $G = \{x / x = 2^a 3^b$ మరియు $a, b \in z\}$ సమితి సాధారణ గుణకారము దృష్ట్యా ఒక సమూహము అని చూపండి.

2. If 'a' is an element of a group G such that $o(a) = n$ then $a^m = e$ iff n / m.

   సమూహము G లో మూలకము 'a' యొక్క తరగతి n, i.e, $o(a) = n$ అప్పుడు $a^m \Leftrightarrow e\ n / m$.

3. The necessary and sufficient condition for a finite complex H of a group G to be a subgroup of G is $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

   ఒక సమూహము G లో పరిమిత కాంప్లక్స్ H, G లో ఉపసమూహము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

4. A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G iff each left cosets of H in G is a right coset of H in G.

   G లో H అభిలంబ ఉపసమూహం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి ఒక కుడి సహసమితి.

5. If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G, then $H \cap N$ is a normal subgroup of G.

   సమూహము G లో H ఒక ఉపసమూహము మరియు N అభిలంబ ఉపసమూహము అయితే H లో $H \cap N$ అనేది ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము.

6. The necessary and sufficient condition for a homomorphism f of a group G onto a group G' with kernel K to be an isomorphism of G into G' is that $k = \{e\}$.

   సమూహము G నుండి సమూహము G' కు నిర్వచింపబడిన సంగ్రస్త సమరూపత G నుండి G' కు తుల్యరూపత అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $k = \{e\}$ ఇక్కడ K = కెర్ f.

7. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $\{1, -1, i, -i\}$.

$\{1, -1, i, -i\}$ అనే గుణకార సమూహములో తుల్యరూపత కలిగిన క్రమ ప్రస్తార సమూహమును కనుక్కోండి.

8. A cyclic group of order n has $\phi(n)$ generators. Prove it.

n తరగతి కలిగిన చక్రీయ సమూహమునకు $\phi(n)$ జనక మూలకాలుంటాయి అని చూపండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

(Essay answer questions)

Answer ALL of the following questions.

9. (a) A finite semi group $(G, \cdot)$ satisfying the cancellation laws is a group.

పరిమిత అర్ధసమూహము $(G, \cdot)$ లో కొట్టివేత న్యాయాలు నిజమైన G ఒక సమూహము అవుతుంది.

Or

(b) Prove that the set of n^{th} roots of unity under multiplication form a finite group.

1 యొక్క n వ మూలములతో ఏర్పడిన సమితి గుణకారము దృష్ట్యా ఒక పరిమిత వినిమయ సమూహము అని చూపండి.

10. (a) The union of two subgroups of a group is a subgroup iff one is contained in the other.

ఒక సమూహములో రెండు ఉపసమూహాల సమ్మేళనము ఆ సమూహముతో ఉపసమూహము కావలెనన్న ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము. ఒకటి ఇంకొక దానిలో ఉపసమితి.

Or

(b) State and prove Lagrange theorem for finite groups.

పరిమితి సమూహాలకు లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించండి.

11. (a) If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G then show that H is a normal subgroup of G.

G సమూహంలో సూచిక రెండు కలిగిన G ఉపసమూహం H అయిన H అనునది G యొక్క అభిలంబ సమూహం అని చూపండి.

Or

(b) Let H be a normal subgroup of a group $(G, \cdot)$ then prove that the quotient set G/H is a group with respect to co-set multiplication.

$(G, \cdot)$ కు H ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము. G లోని H యొక్క సహసమితుల సమితి G/H సహసమితుల గుణకారం దృష్ట్యా ఒక సమూహం అని చూపండి.

12. (a) Let G be a group and N be a normal subgroup of G. Let f be a mapping from G to G/N defined by $f(x) = Nx$ for $x \in G$. Then f is a homomorphism of G on to G/N and $\ker f = N$.

ఒక సమూహము N దానిలో అభిలంబ ఉపసమూలకము అనుకొనుము G నుండి G/N కు f ప్రమేయము $f(x) = Nx$ $x \in G$ అని నిర్వచింపబడినది. అప్పుడు G నుండి G/N కు f సుగ్రస్త సమరూపత మరియు కెర్నల్ $\ker f = N$ అగును.

Or

(b) State and prove fundamental theorem on homomorphism of groups.

సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూలసిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించండి.

13. (a) State and prove Cayley's theorem.

కేలే సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Every subgroup of cyclic group is cyclic.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉప సమూహము చక్రీయము.