(MAT5SA) **(3110-5 A)**

B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2018.

Third Year – Fifth Semester

Part II – Mathematics

Paper V — RING THEORY AND VECTOR CALCULUS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

1. Every field is an integral domain.
ప్రతి క్షేత్రము ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశం.

2. The intersection of two ideals of a ring R is an ideal of R.
R వలయం యొక్క రెండు ఐడియల్సు ఛేదనం, R వలయానికి ఐడియల్ అవుతుంది.

3. If F is a homomorphism of a ring R into a ring R' than $\ker f$ is an ideal of R.
$F : R \to R'$ వలయ సమరూపత యొక్క $\ker f$, R వలయానికి ఒక ఐడియల్ అని చూపండి.

4. The homomorphic image of a ring is a ring.
ఒక వలయం యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబం మరల వలయమే అవుతుంది.

5. If $r = a\cos ti + a\sin tj + at\tan\theta k$. Find $\left|\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{dr}{dt}\right|$
$r = a\cos ti + a\sin tj + at\tan\theta k$ అయితే $\left|\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{dr}{dt}\right|$ విలువను కనుగొనుము.

6. Find $\operatorname{div} f$ and $\operatorname{curl} f$ where $F = grad(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$
$F = grad(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ అయితే $\operatorname{div} f$, $\operatorname{curl} f$ ఎంతెంత?

7. Find $\int_C F.dr$ where $F = xyi + yzj + zxk$ and the curve C is $r = ti + t^2j + t^3k, t$ varying from -1 to 1.
$F = xyi + yzj + zxk$ అయి $r = ti + t^2j + t^3k$, $t = -1$ నుండి $t = 1$, వరకు C అను వక్రముపై $\int_C F.dr$ ను కనుక్కోండి.

8. Prove that $(f \times \nabla) = r = -2f$.
$(f \times \nabla) = r = -2f$ అని చూపండి.

SECTION B — $(5 \times 10 = 50$ marks)

Answer ALL of the following questions.

9. (a) Prove that every finite integral domain is a field.

ప్రతి పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశమూ క్షేత్రం అవుతుంది.

Or

(b) Prove that the ring of integers Z is a principal ideal ring.

Z పూర్ణాంక వలయము ఒక ప్రధాన ఐడియల్ వలయం అని చూపండి.

10. (a) State and Prove fundamental theorem of homomorphism of rings.

వలయాల సమరూపత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) An ideal $U \neq R$ of a commutative ring R, is a prime ideal if and only if R/U is an integral domain.

వలయం R లో U అనే ఆదర్శం ప్రధాన ఆదర్శం కావడానికి వ్యుత్పన్న వలయం R/U ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశం కావడం ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అని నిరూపించండి.

11. (a) Prove that $curl(A \times B) = A\, div\, B - B\, div\, A + (B.\nabla)\, A - (A.\nabla)\, B$.

$curl(A \times B) = A\, div\, B - B\, div\, A + (B.\nabla)\, A - (A.\nabla)\, B$ అని నిరూపించండి.

Or

(b) Show that $\nabla^2 r^n = n(n+1)\, r^{n-2}$.

$\nabla^2 r^n = n(n+1)\, r^{n-2}$ అని చూపండి.

12. (a) If $F = (x^2 + y^2)i = 2xy\, i$ evaluate $\oint_C F.dr$ where the curve C is the rectangle in the xy plane bounded by $y = 0,\ y = b,\ x = 0, x = a$.

$F = (x^2 + y^2)i = 2xy\, i$ అయితే xy తలంలో $y = 0,\ y = b,\ x = 0, x = a$ లచే నిబద్ధమైన దీర్ఘ చతురస్రం C వెంబడి $\oint_C F.dr$ ను రాబట్టండి.

Or

(b) Evaluate $\int_S F.N\, ds$ where $F = 18zi - 12j + 3yk$ and S is the part of the plane $2x + 3y + 6z = 12$ located in the first octant.

$F = 18zi - 12j + 3yk$ అయి ప్రథమాష్టమంలోని $2x + 3y + 6z = 12$ తలభాగం S అయితే $\int_S F.N\, ds$ గణించండి.

13. (a) State and Prove Stoke's theorem.

స్టోక్స్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Verify Gauss's divergence theorem to evaluate $\int_S ((x^3 - yz)i - 2x^2yj + zk).N\, ds$ over the surface of a cube bounded by the coordinate planes $x = y = z = a$.

$x = y = z = a$ తలాలచే పరివృతమై ఘనతలంపై $\int_S ((x^3 - yz)i - 2x^2yj + zk).N\, ds$ విలువను గౌస్ అవసరణ సిద్ధాంతంతో సరిచూపండి.