(MAT5SB) (3110-5B)

B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2018.

Third Year — Fifth Semester

Part II — Mathematics

Paper VI — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

1. The set w of ordered triads $(x, y, 0)$ where $x, y \in F$ is a subspace of $V_3(F)$.

అన్ని $x, y \in F$ లకు $(x, y, 0)$ అను త్రికముల సమితి w అయితే $V_3(F)$ నకు w ఒక ఉపసమితి అని చూపండి.

2. Prove that the linear span $L(S)$ of any subset S of a vector space $V(F)$ is a subspace of $V(F)$.

$V(F)$ సదిశాంతరాళంలోని ఏదైనా ఉపసమితి S అనుకోండి $V(F)$ నకు $L(S)$ ఉపాంతరాళము అని చూపుము.

3. Show that the vectors $(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$ of $R^3(R)$ do not form a basis set of $R^3(R)$.

సదిశలు $(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$, $R^3(R)$ నకు ఆధారమును ఏర్పరచవనిచూపుము.

4. State and prove Invariance theorem.

ఇన్ వేరియన్స్ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించుము.

5. The mapping $T : V_3(R) \to V_2(R)$ is defined by $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ show that T is a linear transformation.

$T : V_3(R) \to V_2(R)$ ప్రమేయాన్ని $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ నిర్వచింపబడింది T ఋజు పరివర్తనమని చూపండి.

6. Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ to upper triangular form.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ మాత్రికను ఎగువ త్రిభుజ మాత్రికగా మార్చుము.

7. State and prove Parallelogram law.

సమాంతర చతుర్భుజ నియమాన్ని నిర్వచించి నిరూపించుము.

8. Find a unit vector orthogonal to $(4, 2, 3)$ in R^3.

R^3 అంతరాళంలో^{6} $(4, 2, 3)$ సదిశకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

SECTION B — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer the following questions.

Each question carries 10 marks.

9. (a) Let $V(F)$ be a vector space. A non-empty set $W \subseteq V$. The necessary and sufficient condition for W to be a subspace of V is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

$V(F)$ ఒక సదిశాంతరాళము. శూన్యేతర సమితి $W \subseteq V$. V లో^{6} W ఒక ఉపాంతరాళం కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in F$ $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ అని చూపుము.

Or

(b) If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space $V(F)$ then prove that $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$.

$V(F)$ సదిశాంతరాళంనకు W_1 మరియు W_2 లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$ అని చూపుము.

10. (a) Let $V(F)$ be a finite dimensional vector space of dimension n and w be the subspace of V. Then w is a finite dimensional vector space with $\dim w \leq n$. Prove it.

పరిమిత పరిమాణపు సదిశాంతరాళం $V(F)$ నకు పరిమాణము n అనుకోండి V నకు w ఉపాంతరాళము w కూడా $\dim w \leq n$ అనునట్లు పరిమిత సదిశాంతరాళము అని చూపుము.

Or

(b) Let w_1 and w_2 be two subspaces of R^4 given by $w_1 = \{(a, b, c, d)/b - 2c + d = 0\}$, $w_2 = \{(a, b, c, d)/a = d, b = 2c\}$. Find the basis and dimension of

(i) w_1

(ii) w_2

(iii) $w_1 \cap w_2$ and hence find $\dim(w_1 + w_2)$.

R^4 సదిశాంతరాళనికి w_1 మరియు w_2 ఉపాంతరాళాలు $w_1 = \{(a, b, c, d)/b - 2c + d = 0\}$, $w_2 = \{(a, b, c, d)/a = d, b = 2c\}$ అయితే ఈ క్రింది వాటి ఆధార సమితి పరిమాణం నిర్ణయించండి.

(i) w_1

(ii) w_2

(iii) $w_1 \cap w_2$ అయిన $\dim(w_1 + w_2)$ను కనుగొనుము.

11. (a) Find $T(x, y, z)$ where $T: R^3 \to R$ is defined by $T(1,1,1)\ 3$, $T(0,1,-2)=1$, $T(0,0,1)=-2$.

$T: R^3 \to R$ ప్రమేయము $T(1,1,1)\ 3$, $T(0,1,-2)=1, T(0,0,1)=-2$ గానిర్వచింపబడిన $T(x, y, z)$ను కనుగొనుము.

Or

(b) Find the null space, range, rank and nullity of the transformation $T: R^2 \to R^3$ defined by $T(x, y)=(x+y, x-y, y)$.

$T: R^2 \to R^3$ ఋజు పరివర్తన $T(x, y)=(x+y, x-y, y)$ అని నిర్వచిస్తే T యొక్క శూన్యతాంతరాళము, వ్యాప్తి, పరివర్తనకోటి, పరివర్తన శూన్యతలను కనుక్కోండి.

12. (a) State and prove Cayley-Hamilton theorem.

కేయిలో హేమిల్టన్ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Find the characteristic roots and corresponding characteristic vectors of the matrix $A=\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు లాక్షిణిక విలువలు వాటికి అనురూపమైన లక్షిణిక సదిశలను కనుగొనుము.

13. (a) State and prove Cauchy Schwarz's inequality.

కోషి-ష్వార్జ్ అసమానతను నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Given $\{(2,1,3), (1,2,3), (1,1,1)\}$ is a basis of R^3, construct an orthonormal basis.

R^3 అంతర లబ్ధాంతరాళానికి $\{(2,1,3), (1,2,3), (1,1,1)\}$ ఒక ఆధారం అయితే ఒక లంబాభి లంబ ఆధారం నిర్మించండి.

———————