THREE YEAR B.Sc./B.A. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017

THIRD SEMESTER

Part II — Mathematics

ABSTRACT ALGEBRA

Time : 3 Hours *Max. Marks : 75*

SECTION – A

సెక్షన్– ఎ

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

(Marks : 5 × 5 marks = 25 marks)

1. Show that a finite semi-group $(G, \cdot)$ satisfying the cancellation laws is a group.

   పరిమిత అర్ధసమూహము $(G, \cdot)$ అనునది కొట్టివేత న్యాయాలు పాటిస్తే అది సమూహము అవుతుందని చూపండి.

2. In a group G, if $a \in G$ then show that $o(a) = o(a^{-1})$.

   సమూహము G లో, $a \in G$ అయితే $o(a) = o(a^{-1})$ అని చూపండి.

3. If H_1 and H_2 are two sub-groups of group G then show that $H_1 \cap H_2$ is also a sub-group of G.

   సమూహము G లో H_1 మరియు H_2 లు రెండు ఉపసమూహాలు అయితే $H_1 \cap H_2$ కూడా G లో ఉపసమూహము అవుతుందని చూపండి.

4. If H is sub-group of group G then show that $a \equiv b \ (\text{mod}\, H)$ is an equivalence relation.

   సమూహము Gలో H ఉపసమూహమైతే $a \equiv b \ (\text{mod}\, H)$ అనునది తుల్య సంబంధము అవుతుందని చూపండి.

5. Show that $H = \{1, -1\}$ is a normal sub-group of the group $G = \{1, -1, i, -i\}$ under multiplication.

   $H = \{1, -1\}$ అనునది గుణకారసమూహము $G = \{1, -1, i, -i\}$ యొక్క అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని చూపండి.

6. If G is group and H is sub-group of index 2 in G, then show that H is normal sub-group of G.

G అను సమూహములో H అనునది సూచిక 2 కల్గిన ఉపసమూహము అయితే H అనునది G లో అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని చూపండి.

7. $(G, \cdot)$, $(G', \cdot)$ are two groups and $\delta : G \to G'$ is homomorphism then show that (a) $f(e) = e'$, e is identity in G and e' is identity in G' (b) $f(a^{-1}) = \{f(a)\}^{-1}$.

$(G, \cdot)$ $(G', \cdot)$ లు రెండు సమూహాలు మరియు $\delta : G \to G'$ సమరూపతలయితే

(a) $f(e) = e'$,అనునది G లో తత్సమము, e' అనునది G' లో తత్సమము

(b) $f(a^{-1}) = \{f(a)\}^{-1}$ అని చూపండి.

8. In a group G, $f : G \to G$ is given by $f(x) = x^2$, $\forall\ x \varepsilon G$ is homomorphism then show that G is abelian.

సమూహము G లో, $f : G \to G$ ను $f(x) = x^2$ $\forall\ x \varepsilon G$ సమరూపత అయితే G వినిమయము అని చూపండి.

9. Write down the product $(1\ \ 3\ \ 2)(5\ \ 6\ \ 7)(2\ \ 6\ \ 1)(4\ \ 5)$ as disjoint cycles.

$(1\ \ 3\ \ 2)(5\ \ 6\ \ 7)(2\ \ 6\ \ 1)(4\ \ 5)$ అను లబ్దాన్ని వియుక్త చక్రాలుగా వ్రాయండి.

10. Show that $(Z_5, +)$ is cyclic group.

$(Z_5, +)$ అనునది చక్రీయ సమూహము అని చూపండి.

SECTION – B

సెక్షన్ – బి

Answer ALL the following questions.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 10 marks = 50 marks)

UNIT – I

11. Prove that the set of matrices $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ form a group w.r.to matrix multiplication.

$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ అను మాత్రికల సమితి, మాత్రికల గుణకారము దృష్ట్యా సమూహము అవుతుందని చూపండి.

Or

12. Prove that the set of nth roots of unity under multiplication form a finite abelian group.

1 యొక్క n వ మూలాల సమితి గుణకారము దృష్ట్యా పరిమిత వినిమయ సమూహము అవుతుందని చూపండి.

UNIT – II

13. Show that the necessary and sufficient condition for a complex H of a finite group G to be a sub-group is $a \in H$, $b \in H \Rightarrow ab \in H$.

పరిమిత సమూహము G లో H అను కాంప్లెక్స్ ఉపసమూహము కావడానికి $a \in H$ $b \in H$ $\Rightarrow ab \in H$ అనునది ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

Or

14. If H and K are two sub-groups of group G, then HK is sub-group of G iff $HK = KH$.

సమూహము G లో H మరియు K లు రెండు ఉపసమూహాలయితే HK ఉపసమూహము కావడానికి $HK = KH$ అనునది ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

UNIT – III

15. A sub-group H of a group G is normal sub-group of G iff the product of two right (left) cosets of H in G is again a right (left) cosets of H in G.

సమూహము G లో H అను ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహము కావడానికి రెండుకుడి (లేదా ఎడమ) సహసమితుల లబ్ధము కుడి (ఎడమ) సహసమితి అవుతుందని చూపండి.

Or

16. Show that the set of all cosets $\frac{G}{H}$ is a group under cosets multiplication where H is normal sub-group of group G.

సమూహము G లో H అభిలంబ ఉపసమూహమయితే అన్ని సహసమితుల సమితి $\frac{G}{H}$ అనునది సమూహముఅవుతుందని చూపండి.

UNIT – IV

17. State and prove fundamental theorem of group homomorphism.

సమూహ సమరూపతా మూల సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

18. Define kernel of group homomorphism. If $f: G \to G'$ is homomorphism then show that kernel of f is a normal sub-group of G.

సమూహ సమరూపతా కెర్నెలును నిర్వచించి, $f: G \to G'$ సమరూపతలయితే f యొక్క కెర్నెలు G లో అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని చూపండి.

UNIT – V

19. State and prove Cayley theorem on permutation group.

    ప్రస్తార సమూహాలలో కేలీ సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

20. (a) Show that a group of prime order is cyclic

    అభాజ్య తరగతి గల సమూహము చక్రీయము అని చూపండి.

    (b) Examine $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ whether the permutation is odd or even.

    $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ అను ప్రస్తారము లేదా సరిప్రస్తారము నిర్ణయించండి.