B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2019.

Third Year — Fifth Semester

Part II — Mathematics

Paper V — RING THEORY AND VECTOR CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE of the following questions.

1. Prove that a field has no zero divisors.

   ప్రతి క్షేత్రమునకు శూన్య భాజకాలు లేవు అని నిరూపించండి.

2. If F is a field then show that $\{0\}$ and F are the only ideals of F.

   F ఒక క్షేత్రం అయిన $\{0\}$ మరియు F మాత్రమే F యొక్క ఆదర్శాలని చూపండి.

3. Every homomorphic image of a ring is a ring.

   ఒక వలయం యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబం మరల వలయమే అవుతుంది.

4. If f is a homomorphism of a ring R into the ring R' then f is an into isomorphism if and only if $\ker f = \{0\}$.

   $f: R \to R'$ వలయ సమరూపత అయితే f అను సమరూపత అన్వేక సమరూపత కావటానికి ఆవశ్య పర్యాప్త నియమము $\ker f = \{0\}$ కావటం అని నిరూపించండి.

5. Find the directional derivative of $f = xy + yz + zx$ in the direction of the vector $i + 2j + 2k$ at the point $(1, 2, 0)$.

   $f = xy + yz + zx$ అయిన, $i + 2j + 2k$ అను వక్రం దిశగా $(1, 2, 0)$ అను బిందు నందు దిశానిర్దేశమును కనుగొనండి.

6. If $A = 5t^2 i + tj - t^3 k$ and $B = \sin t\, i - \cos t\, j$ then find $\dfrac{d}{dt}(A \cdot B)$ and $\dfrac{d}{dt}(A \times B)$.

   $A = 5t^2 i + tj - t^3 k$ మరియు $B = \sin t\, i - \cos t\, j$ అయిన $\dfrac{d}{dt}(A \cdot B)$ మరియు $\dfrac{d}{dt}(A \times B)$ ను కనుగొనండి.

7. Evaluate $\oint_C F \cdot dr$ where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ and $F = yi + zj + xk$.

   $x^2 + y^2 = 1$, అను వృత్తము C అయిన $z = 0$, $F = yi + zj + xk$ అయినప్పుడు $\oint_C F \cdot dr$ ను గణించండి.

8. If $F = 3xy\bar{i} - y^2\bar{j}$, evaluate $\oint_C \bar{F} \cdot \overline{dr}$ where C is the curve $y = 2x^2$, in xy plane from $(0, 0)$ to $(1, 2)$.

$\bar{F} = 3xy\bar{i} - y^2\bar{j}$ అయితే $\oint_C \bar{F} \cdot \overline{dr}$ విలువ కనుక్కోండి, ఇక్కడ, C అనునది $y = 2x^2$, అను xy తలములోని $(0, 0)$ మరియు $(1, 2)$ ల వద్ద వున్న వక్రము.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL of the following questions.

9. (a) Prove that $Z(i) = \{a + ib / a, b \in Z\}$ of Gaussian integers is an integral domain with respect to addition and multiplication of numbers.

$Z(i) = \{a + ib / a, b \in Z\}$ అను గాసియన్ పూర్ణాంకాల సమితి సంకలన, గుణకారముల దృష్ట్యా పూర్ణాంక ప్రదేశము అని చూపండి.

Or

(b) Prove that the ring of integers Z is a principal ideal ring.

Z పూర్ణాంక వలయము ఒక ప్రధాన ఐడియల్ వలయం అని చూపండి.

10. (a) State and prove fundamental theorem of homomorphism of rings.

వలయాల సమరూపత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Prove that an ideal U of a commutative ring R with unity is maximal if and only if the quotient ring R/U is a field.

వలయం R లో U అనే ఆదర్శం ప్రధాన ఆదర్శం కావడానికి వ్యుత్పన్న వలయం R/U ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమమును నిరూపించుము. curl F·nds = F·dn

11. (a) Prove that $curl\,(A \times B) = A\,div\,B - B\,div\,A + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$.

$curl\,(A \times B) = A\,div\,B - B\,div\,A + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$ అని నిరూపించండి.

Or

(b) (i) Show that $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$.

$\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$. అని చూపండి.

(ii) Find $grad\,f$ at the point $(1, 1, -2)$ where $f = x^3 + y^3 + 3xyz$.

$f = x^3 + y^3 + 3xyz$ అయిన $(1, 1, -2)$ వద్ద $grad\,f$ కనుక్కోండి.

12. (a) If $\overline{F} = (3x^2 + 6y)\bar{i} - 14yz\bar{j} + 20xz^2\bar{k}$ calculate $\int_C \overline{F} \cdot \overline{dr}$ along the lines from (0, 0, 0) to (1, 0, 0) then to (1, 1, 0) and then to (1, 1, 1).

$\overline{F} = (3x^2 + 6y)\bar{i} - 14yz\bar{j} + 20xz^2\bar{k}$ అయితే $\int_C \overline{F} \cdot \overline{dr}$ విలువను (0, 0, 0), (1, 0, 0) నుండి (1,1,0) నుండి (1,1,1) ల మధ్యనున్న సరళరేఖల వెంబడి కనుక్కోండి.

Or

(b) Evaluate $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, dS$ where $\overline{F} = 18z\bar{i} - 12\bar{j} + 3y\bar{k}$ and S is the part of the plane $2x + 3y + 6z = 12$ located in the first octant.

$\overline{F} = 18z\bar{i} - 12\bar{j} + 3y\bar{k}$ అయి ప్రథమాష్టమంలోని $2x + 3y + 6z = 12$ తలభాగం S అయితే $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, dS$ గణించండి.

13. (a) State and prove Green's theorem.

గ్రీన్స్ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Evaluate by Gauss divergence theorem for $\iint_S 4xz\, dy\, dz - y^2 dz\, dx + yz\, dx\, dy$ where S is the surface of the cube bounded by the planes $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 1$.

$x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$ తలాలచే పరిబద్ధమైన ఘనం యొక్క ఉపరితలం S అయిన $\iint_S 4xz\, dy\, dz - y^2 dz\, dx + yz\, dx\, dy$ ను గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి గణించండి.